Title	「不可逆な多体系」としての流体乱流(基研研究会「非可逆な多体系への統計物理及びその周辺分野からのアプローチ」報告,研究会報告)
Author(s)	田口, 善弘
Citation	物性研究 (1991), 57(2): 210-212
Issue Date	1991-11-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94808
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

「不可逆な多体系」としての流体乱流

東工大理　田口善弘

乱流分野の導入をする前に本研究会の各分科の共通の興味は何か？ということについて考えてみよう．各々の分科ごとに目的とするものは全く異なるが，研究の手法，アプローチの態度といったものにある程度の共通点が見受けられるように思われる．それは、

「単純な要素が集合したときの非自明な振る舞い。特に、従来の統計力学の枠組みでは記述できない定常状態（自己組織化）の存在。」

更に具体的に言うと、例えば、

- 非自明な定常状態を作ることの共通成因は何か？
- そのような状態の出現点を決められるか？
- 定常状態はそもそも存在するか？
- どういう状態を定常状態といってよいのか？(分散が発散している分布でも、well-defined か？物理量がいたるところ、発散していても状態と言えるのか？)

というようなことであろう。テーマ自体は雑多な集団を集めてこの様な研究会を行う目的は、以上のようなことについて個々のモデルによらない共通の「原理」を構築できる可能性はあるか？の探索にあるべきであろう。(実際に、達成できるかどうかは難しいものがあるが。) そして、この様な探索こそが本研究会で言うところの「アプローチ」に他ならない。

そこで、当然出て来るべき疑問としては、それでは、なんで、流体乱流が多体系なのか？ということであろう。

§1. 相互作用する渦糸としての乱流

さて、ここで、改めて流体力学の復習をしてみよう。乱流の場合の基本的な場の量としては次のようなものが考えられる。

$\mathbf{v}(\mathbf{r})$: 速度場

$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$: 渦度　$(=\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ (⟵一般化された角運動量密度)

さらに、よく知られたことであるが、この様な場の量は電磁気学との類推ができて、

流体力学	電磁気学
$\mathbf{v}(\mathbf{r})$ 速度	$\mathbf{B}(\mathbf{r})$ 磁束密度 or $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ 磁場
$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$ 渦度	$\mathbf{j}(\mathbf{r})$ 電流密度
$\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{r})=\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$	$\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r})=\mathbf{j}(\mathbf{r})$
$\nabla\cdot\mathbf{v}(\mathbf{r})=0$	$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})=0$
(流体の体積が一定の時)	

のような関係が成立する。つまり、非圧縮性流体（体積一定）の運動は電磁場として取り扱い可能である。具体的には速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ は Biot-Savier 則により渦度場$\omega(\mathbf{r})$ と関係付けられ、

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}') \sim \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times \mathbf{ds}}{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')^2}$$

の様に書ける。

従って、渦度は電流密度に対応し、電流のように「流れ」を表す場の量であることがわかる。しかも、この場合、湧き出しや、吸い込みは許されないので、渦度は必ず「端のない線上」に分布しなくてはならない。この「線」を渦糸という。それ故、乱流の渦糸描像が成立する。乱流の渦糸描像とは、乱流を渦糸（単純な要素）が Biot-Savier 則によって相互作用しながら、運動する状態として定義するものである。乱流もこういう見方をすれば、多体系の問題と見なすことも可能なのである。

§2. 格子モデルまたは一般化された拡散方程式としての渦度方程式

次に、流体における基礎方程式である Navier-Stokes 方程式（非圧縮性流体）が実は、非線形多体問題によく登場するような形で表現できることを見よう。Navier-Stokes 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

p：圧力

という形であり、極めて特殊で、統計力学には馴染みのない式に見える。しかし、ここで、両辺の $\nabla\times$をとると、渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nu \Delta \omega$$

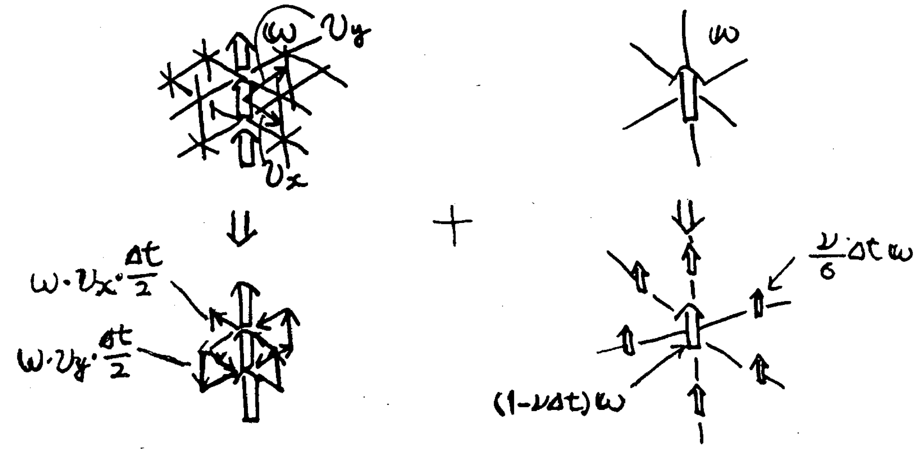
$$\nabla \times \mathbf{v} = \omega$$

という TDGL や液晶対流系の方程式のような、現象論的方程式に良くある形に似た形が得られることが分かる。つまり、ωという物理量の移流項付き拡散方程式$+\alpha$である。

更に、格子モデル（Taguchi and Takayasu PRA vol.41 1990 p2249/ preprint 1990) を考慮すると、もっと身近なモデル（拡散付き格子上凝集モデルなど）に似たものであることがわかる。

[格子モデル]

単純立方格子を用意する。x, y, z bond にそれぞれ渦度ωの x, y, z成分を割り当てる。各 bond 上の速度場が求まったとすると、以下のような動力学、



が渦度方程式と等価になる。この動力学は、単純でよく研究されている格子上の動力学モデル（コンタクトプロセス、カップルドマップラティスなど）と類似している....。

§3. まとめ

なんで、この研究会に、流体乱流があるの？　という疑問に答えるべく努力した。乱流は「渦糸」という単純な要素が Biot-Savier 則で相互作用しつつ運動して何等かの空間的・時間的秩序を作り上げるモデル、という見方ができることを示した。更に、非圧縮性流体の運動方程式は渦度方程式という移流項付き拡散方程式もどきで表せることと、格子モデルを構成すると何時か何処かでみたような形のモデルになることも示した。